



UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des sciences et de génie
Département de mathématiques et de statistique

Examen 1 (Solutions)

Mathématiques importantes — MAT-1234

18 juin 2026 (12 h 30 à 15 h 20)

Enseignant : Mr. Bean

Question 1 (6 points)

- (3) (a) Calculez la valeur de $\int_0^1 x^2 \, dx$.

En utilisant la règle de puissance pour l'intégration :

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

- (3) (b) Trouvez, en centimètres carrés, l'aire du rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.

Il suffit de multiplier la longueur par la largeur :

$$\text{Aire} = 5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$$

Question 2 (5 points)

Quelle est la dérivée de $f(x) = x^3 + 2x$?

☐ $3x^2$

☒ $3x^2 + 2$

☐ $x^2 + 2$

☐ $3x^2 + 2x$

En appliquant les règles de dérivation :

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

Question 3 (5 points)

Laquelle des affirmations suivantes est vraie pour tout nombre réel x ?

☐ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 2$ ☒ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ ☐ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 0$

☐ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = x$

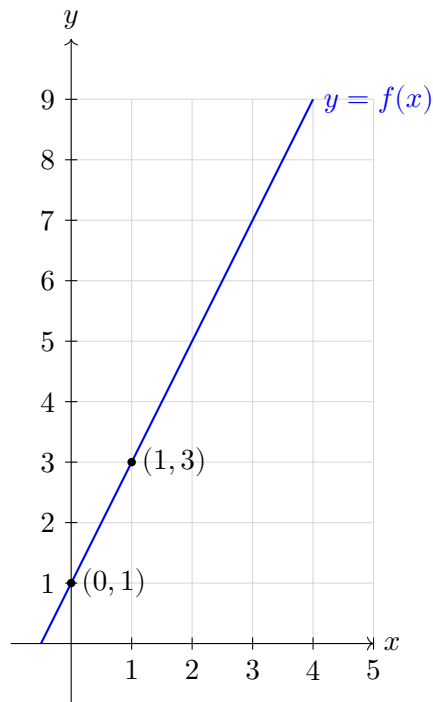
Il s'agit de l'identité pythagoricienne fondamentale en trigonométrie :

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Cette identité est valable pour tout nombre réel x .

Question 4 (8 points)

Le graphique ci-dessous représente une fonction affine $f(x)$.



Déterminez l'équation de la droite sous la forme $y = mx + b$. Inscrivez votre réponse dans l'encadré ci-dessous après l'avoir justifiée.

À partir des points $(0, 1)$ et $(1, 3)$:

- Ordonnée à l'origine : $b = 1$
- Pente : $m = \frac{3-1}{1-0} = 2$

L'équation est donc $y = 2x + 1$.

Question 5 (12 points)

L'image ci-dessous est très jolie.



Analysez cette illustration et répondez aux questions suivantes.

- (3) (a) Décrivez ce que vous observez.
- (3) (b) Quelle conclusion pouvez-vous en tirer ?

Cette question démontre comment inclure des images dans vos examens. Vous pouvez utiliser n'importe quelle image aux formats PDF, PNG ou JPG. Les lignes pointillées ou pleines peuvent être utilisées pour fournir de l'espace pour les réponses, mais elles sont neutralisées en mode [solution] pour ne pas apparaître dans le corrigé.

Question 6 (12 points)

Démontrez le théorème suivant :

Pour tout entier $n \geq 1$, la somme des n premiers entiers positifs est donnée par :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration par récurrence :

Cas de base : Pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

La formule est vraie pour $n = 1$.

Hypothèse de récurrence : Supposons que la formule est vraie pour un certain entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Étape de récurrence : Montrons que la formule est vraie pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour $n + 1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 1$.